

UNE TRANSFORMATION DE LAPLACE-JACOBI*

MICHEL MIZONY†

Abstract. We define an integral transformation on \mathbb{R}_+ , starting from Jacobi functions of the second type. This transformation is a generalization of the usual Laplace transform. The reciprocal transformation is defined using functions which are closely related to Jacobi functions of the first and second types. Finally, for the particular case of the $SO_0(1, n)$ groups, we give an interpretation of the Jacobi function of the second type as a mean of a "hyperbolic Poisson kernel."

Présentation. A chaque couple (α, β) de nombres complexes est associée une mesure $\omega_{\alpha, \beta}(t) dt$ sur \mathbb{R}_+ et à cette mesure un Laplacien: $\Delta_{\alpha, \beta} = (1/\omega_{\alpha, \beta}(t)) \frac{d}{dt} (\omega_{\alpha, \beta}(t) \frac{d}{dt})$. Les deux fonctions de Jacobi de 1-ère et de 2-ème espèce $t \rightarrow \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)$ et $t \rightarrow \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)$ sont fonctions propres (linéairement indépendantes) de l'opérateur $\Delta_{\alpha, \beta}$ pour la valeur propre $\lambda^2 + (\alpha + \beta + 1)^2$, et ceci pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$.

La transformation de Jacobi (ou de Fourier-Jacobi), définie pour $f \in L^1(\mathbb{R}_+, \omega_{\alpha, \beta}(t) dt)$ par

$$\mathfrak{F}_{\alpha, \beta}(f)(\lambda) = \frac{2^{2(\alpha + \beta + 1)} \sqrt{2}}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty f(t) \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) \omega_{\alpha, \beta}(t) dt,$$

a été étudiée par différents auteurs et se réduit à la transformation de Fourier-sphérique sur les groupes de Lie semi-simples non compacts de rang réel 1, pour certaines valeurs demi-entières des paramètres α et β . Nous retiendrons pour notre exposé les méthodes analytiques de démonstrations établies par T. Koornwinder [9].

Par ailleurs, le physicien G. A. Viano [14] souligne l'importance, dans le cas $\beta = -\frac{1}{2}$ $\alpha = 0$, d'une transformation intégrale associée à la fonction propre $\Phi_{0, -1/2}(\lambda, t) = Q_{-1/2+i\lambda}(\text{ch } t)$ (c'est la fonction de Legendre de 2-ème espèce).

Cette transformation intervient dans l'étude de problèmes d'amplitude de dispersion en théorie des interactions fortes. G. A. Viano rattache cette transformation à la géométrie de l'espace Riemannien symétrique $SU(1, 1)/SO(2)$, et lui donne un statut de transformation de Laplace.

Nous allons dans cet article étudier systématiquement pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ la transformation $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ définie par exemple pour f continue à support compact dans \mathbb{R}_+^* par

$$\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(t) (\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) / c_{\alpha, \beta}(-\lambda)) dt$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $c_{\alpha, \beta}(-\lambda)$ étant la fonction de Harish-Chandra. Lorsque $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ nous retrouvons la transformation de Laplace usuelle.

PLAN DE L'ARTICLE

1. Rappels et notations.
2. La transformation de Fourier-Jacobi.
3. Des transformations intégrales fractionnaires.
4. La transformation de Laplace-Jacobi.
5. La formule d'inversion.
6. Transformations de Bessel, opérateurs de Chébli.
7. Transformations radiales sur certains groupes de Lie semi-simples.
8. Eléments pour une interprétation géométrique: Noyau de Poisson hyperbolique; formule d'addition.

* Received by the editors July 17, 1981, and in revised form May 28, 1982.

† Département de Mathématiques, Université Claude Bernard, Lyon 1, 69622 Villeurbanne Cedex, France.

1. Rappels et notations. Soit \mathbb{R} le corps des nombres réels, \mathbb{C} le corps des complexes, \mathbb{N} l'ensemble des entiers, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} / t \geq 0\}$, $\mathbb{R}_+^* = \{t \in \mathbb{R} / t > 0\}$ et $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} / n > 0\}$. Tous les espaces de fonctions sont à valeurs dans \mathbb{C} .

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, soit la mesure $\omega_{\alpha, \beta}(t) dt = (\text{sh } t)^{2\alpha+1} (\text{ch } t)^{2\beta+1} dt$ sur \mathbb{R}_+^* .

Considérons l'opérateur $\Delta_{\alpha, \beta}$ formé à partir de $\omega_{\alpha, \beta}$ par:

$$(1) \quad \Delta_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\omega_{\alpha, \beta}(t)} \frac{d}{dt} \left(\omega_{\alpha, \beta}(t) \frac{d}{dt} \right) = \frac{d^2}{dt^2} + [(2\alpha + 1)\text{coth } t + (2\beta + 1)\text{th } t] \frac{d}{dt}.$$

Posons $\rho = \alpha + \beta + 1$; soit pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ la solution $t \rightarrow \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)$ de l'opérateur

$$(2) \quad (\Delta_{\alpha, \beta} + \lambda^2 + \rho^2)f = 0,$$

solution telle que $\varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, 0) = 1$ et $\frac{d}{dt} \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)|_{t=0} = 0$.

Pour $\alpha \neq -1, -2, \dots$ la fonction $\varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, \cdot)$ s'exprime à l'aide de la fonction hypergéométrique:

$$(3) \quad \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = {}_2F_1 \left(\frac{\rho + i\lambda}{2}, \frac{\rho - i\lambda}{2}; \alpha + 1; -\text{sh}^2 t \right).$$

De plus, si $\lambda \neq -i, -2i, \dots$, il existe une deuxième solution de (2) linéairement indépendante de (3), définie par la condition asymptotique suivante:

$$\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = e^{(i\lambda - \rho)t} (1 + \varepsilon(t)) \text{ avec } \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Cette solution s'écrit à l'aide de la fonction hypergéométrique:

$$(4) \quad \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = (e^t - e^{-t})^{i\lambda - \rho} {}_2F_1 \left(\frac{\beta - \alpha + 1 - i\lambda}{2}, \frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}; 1 - i\lambda; \frac{-1}{\text{sh}^2 t} \right).$$

Les fonctions $\varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, \cdot)$ et $\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, \cdot)$ sont appelées *fonctions de Jacobi* de 1-ère et de 2-ème espèce et nous avons pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $i\lambda \notin \mathbb{Z}$, et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$(5) \quad \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha + 1)} \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = c_{\alpha, \beta}(\lambda) \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) + c_{\alpha, \beta}(-\lambda) \Phi_{\alpha, \beta}(-\lambda, t),$$

où

$$(6) \quad c_{\alpha, \beta}(\lambda) = 2^\rho \frac{\Gamma\left(\frac{i\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - \beta + 1 + i\lambda}{2}\right)}$$

est la fonction c de Harish-Chandra.

En particulier, nous avons:

$$(7) \quad c_{\alpha, -1/2}(\lambda) = c_{\alpha, \alpha}(2\lambda) = \frac{2^{2\alpha+1} \Gamma(i\lambda)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2} + i\lambda)},$$

$$\Phi_{\alpha, -1/2}(\lambda, 2t) = \Phi_{\alpha, \alpha}(2\lambda, t), \quad \varphi_{\alpha, -1/2}(\lambda, 2t) = \varphi_{\alpha, \alpha}(2\lambda, t)$$

et

$$(8) \quad c_{-1/2, -1/2}(\lambda) = 1, \quad \omega_{-1/2, -1/2}(t) = 1$$

$$\Phi_{-1/2, -1/2}(\lambda, t) = e^{i\lambda t}, \quad \varphi_{-1/2, -1/2}(\lambda, t) = \cos \lambda t.$$

2. La transformation de Fourier-Jacobi. Lorsque $\text{Re}(\alpha) > -1$, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}_+$, et chaque $f \in L^1(\mathbb{R}_+, \omega_{\alpha,\beta}(t) dt)$, la transformation de Fourier-Jacobi est définie par:

$$(9) \quad \mathfrak{F}_{\alpha,\beta}(f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{2^{2\rho}\sqrt{2}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty f(t) \varphi_{\alpha,\beta}(\lambda, t) \omega_{\alpha,\beta}(t) dt.$$

Lorsque f est de classe \mathcal{C}^∞ et à support compact sur \mathbb{R}_+ , alors $\mathfrak{F}_{\alpha,\beta}(f)(\lambda)$ se prolonge en une fonction analytique en α, β et λ . Lorsque $\text{Re}(\alpha) > -n-1$ l'expression de ce prolongement analytique est donnée par [9, la formule (3.3)].

Cas particuliers. a) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$; $\mathfrak{F}_{-1/2,-1/2}(f)(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \lambda t dt$ est la transformation de Fourier en cosinus.

b) $\beta = -\frac{1}{2}, \alpha = (n-2)/2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$; $\mathfrak{F}_{(n-2)/2,-1/2}$ est la transformation de Fourier sphérique associée au groupe $SO_0(n, 1)$.

c) $\beta = 0, \alpha = n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$; $\mathfrak{F}_{n-1,0}$ est la transformation de Fourier sphérique associée au groupe $SU(n, 1)$.

d) Pour les autres groupes de Lie-semi-simples non compacts, de centre fini et de rang réel 1, nous avons la transformation de Fourier sphérique sur $Sp(n, 1)$, avec $n = 2, 3, 4, \dots$, en prenant $\alpha = 2n-1$ et $\beta = 1$; enfin pour $\alpha = 7$ et $\beta = 3$ nous avons la transformation associée au groupe exceptionnel $F_4(-20)$.

Les résultats classiques sur ces transformations de Fourier sphériques se prolongent aux transformations de Fourier-Jacobi et peuvent s'énoncer ainsi (cf. [9]):

Formule d'inversion. Lorsque $\text{Re}(\alpha) > -\frac{1}{2}$, et $|\text{Re}(\beta)| < \text{Re}(\alpha + 1), g \in L^1(\mathbb{R}_+, (c_{\alpha,\beta}(\lambda)c_{\alpha,\beta}(-\lambda))^{-1} d\lambda)$,

$$(10) \quad \mathfrak{F}_{\alpha,\beta}^{-1}(g)(t) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty g(\lambda) \varphi_{\alpha,\beta}(\lambda, t) (c_{\alpha,\beta}(\lambda)c_{\alpha,\beta}(-\lambda))^{-1} d\lambda.$$

Formule de Bessel-Parseval. Lorsque α et $\beta \in \mathbb{R}, |\beta| < \alpha + 1$ alors la transformation de Fourier-Jacobi se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R}_+, 2^{2\rho}\omega_{\alpha,\beta}(t) dt)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+, |c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2} d\lambda)$ et pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+, 2^{2\rho}\omega_{\alpha,\beta}(t) dt)$, on a:

$$(11) \quad \int_0^\infty f(t) \overline{g(t)} 2^{2\rho}\omega_{\alpha,\beta}(t) dt = \int_0^\infty \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{g}(\lambda)} |c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2} d\lambda.$$

Remarque. Plus que les résultats, ce sont les méthodes de démonstrations qui nous intéressent. En voici les éléments essentiels.

Pour $\mu \in \mathbb{C}, \text{Re}(\mu) > 0$, pour $\sigma > 0$ et $s \geq 0$, posons:

$$(12) \quad \mathcal{U}_\mu^\sigma(f)(s) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_s^\infty \frac{f(t) \sigma \text{sh } \sigma t dt}{(\text{ch } \sigma t - \text{ch } \sigma s)^{1-\mu}}$$

lorsque f est de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans \mathbb{R}_+ .

Le prolongement analytique en μ de (12) est donné par

$$(13) \quad \mathcal{U}_\mu^\sigma(f)(s) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\mu+n)} \int_s^\infty \frac{d^n}{d(\text{ch } \sigma t)^n} (f)(t) \frac{\sigma \text{sh } \sigma t dt}{(\text{ch } \sigma t - \text{ch } \sigma s)^{1-\mu-n}}$$

lorsque $\text{Re}(\mu) > -n$. \mathcal{W}_μ^1 est en fait la transformation intégrale de Weyl (cf. [5, Chap. 13]) et nous avons:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}_0^\sigma &= \text{id}, & \mathcal{W}_{\mu+\nu}^\sigma &= \mathcal{W}_\mu^\sigma \circ \mathcal{W}_\nu^\sigma, \\ \mathcal{W}_{-1}^\sigma &= -\frac{dt}{d\text{ch}\sigma t} \end{aligned}$$

pour tout $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.

De plus, \mathcal{W}_μ^σ est une bijection de l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , à support compact et paires, sur lui-même.

A l'aide de ces transformations intégrales, T. Koornwinder [9] établit les résultats suivants:

$$(15) \quad \mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{-1}(f) = 2^{3\alpha+3/2} \mathcal{G}_{-1/2,-1/2} \circ \mathcal{W}_{\alpha-\beta}^1 \circ \mathcal{W}_{\beta+1/2}^2(f),$$

formule valable pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ lorsque f est \mathcal{C}^∞ , à support compact sur \mathbb{R}_+ . Cette formule est établie à partir des trois formules suivantes valables pour $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -\frac{1}{2}$ et pour f de classe \mathcal{C}^∞ à support compact:

$$(16) \quad \begin{aligned} (i) \quad & 2^{3\alpha+3/2} \mathcal{W}_{\alpha-\beta}^1 \circ \mathcal{W}_{\beta+1/2}^2(f)(s) = \int_s^\infty f(t) A_{\alpha,\beta}(s,t) dt, \\ (ii) \quad & 2^{2\rho} \omega_{\alpha,\beta}(t) \varphi_{\alpha,\beta}(\lambda, t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \cos \lambda s A_{\alpha,\beta}(s,t) ds, \\ (iii) \quad & A_{\alpha,\beta}(s,t) = \frac{2^{3(\alpha+1/2)} 2 \text{sh} 2t}{\Gamma(\alpha-\beta) \Gamma(\beta+\frac{1}{2})} \int_s^t \frac{(\text{ch} u - \text{ch} s)^{\alpha-\beta-1}}{(\text{ch} 2t - \text{ch} 2u)^{1/2-\beta}} \text{sh} u du \\ & = \frac{2^{\alpha+2\beta+3/2}}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} 2 \text{sh} 2t (\text{ch} t)^{\beta-\alpha} (\text{ch} 2t - \text{ch} 2s)^{\alpha-1/2} \\ & \quad \times {}_2F_1\left(\alpha+\beta, \alpha-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\text{ch} t - \text{ch} s}{2 \text{ch} t}\right). \end{aligned}$$

A partir de la formule (13) est démontré le théorème de Paley-Wiener; cf. [9, théorèmes (3.4) et (4.2)].

Soit $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires à support compact sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^∞ . Soit \mathcal{H} l'ensemble des fonctions analytiques sur \mathbb{C} , paires et rapidement décroissantes, de type exponentiel.

THÉORÈME. (i) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ est une bijection de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H} .

(ii) L'application réciproque est donnée par

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{-1}(g)(t) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \frac{g(\lambda) \varphi_{\alpha,\beta}(\lambda, t)}{c_{\alpha,\beta}(\lambda) c_{\alpha,\beta}(-\lambda)} d\lambda$$

lorsque $|\text{Re}(\beta)| < \text{Re}(\alpha+1)$, et $\text{Re}(\alpha) > -\frac{1}{2}$.

3. Un outil pratique: Les "transformations intégrales fractionnaires". En considérant les résultats exposés par Viano [14], à propos d'une transformation de Laplace liée au groupe $SL(2, \mathbb{R})$ (i.e. $\alpha=0$ et $\beta=-\frac{1}{2}$) et en utilisant les méthodes brièvement rappelées ci-dessus, nous pouvons définir une transformation intégrale attachée à la fonction de Jacobi de 2-ème espèce.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et à support compact dans \mathbb{R}_+ ; les calculs montrent rapidement qu'au lieu de définir cette transformation par la formule

$2^{2\rho}\sqrt{2}/\Gamma(\alpha+1)\int_0^\infty f(t)\Phi_{\alpha,\beta}(\lambda,t)\omega_{\alpha,\beta}(t)dt$, (i.e. en recopiant la définition de la transformation de Fourier-Jacobi), il vaut mieux poser:

$$(17) \quad \mathfrak{L}_{\alpha,\beta}(f)(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \frac{\Phi_{\alpha,\beta}(\lambda,t)}{c_{\alpha,\beta}(-\lambda)} dt.$$

Pour faciliter l'exposition des résultats, il nous faut d'abord introduire une transformation intégrale de type transformation intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville; cf. [5, Chap. 13]; en plus de la transformation du type transformation intégrale fractionnaire de Weyl, cf. formules (12), (13) et (14).

Soit $\delta > 0$ et \mathcal{C}_δ l'ensemble des fonctions continues, à support inclus dans $[\delta, +\infty[$; nous noterons $\mathcal{C}_\delta^\infty$ l'ensemble des fonctions qui sont de plus de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ .

Soit $\sigma > 0, t \geq 0$ et $f \in \mathcal{C}_\delta$; posons pour $\mu \in \mathbb{C}, \text{Re}(\mu) > 0$:

$$(18) \quad \mathfrak{R}_\mu^\sigma(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t f(s) \frac{d \text{ch } \sigma s}{(\text{ch } \sigma t - \text{ch } \sigma s)^{1-\mu}}.$$

L'application $\mu \rightarrow \mathfrak{R}_\mu^\sigma(f)(t)$ est holomorphe sur $\text{Re}(\mu) > 0$ et si de plus $f \in \mathcal{C}_\delta^\infty$ elle admet un prolongement analytique à tout le plan complexe défini par:

$$(19) \quad \mathfrak{R}_\mu^\sigma(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu+n)} \int_0^t \frac{d^n f}{d(\text{ch } \sigma s)^n}(s) \frac{d \text{ch } \sigma s}{(\text{ch } \sigma t - \text{ch } \sigma s)^{1-\mu-n}} \quad \text{dès que } \text{Re}(\mu+n) > 0.$$

Lorsque f est une fonction continue sur \mathbb{R}_+ , la formule (18) garde un sens; mais lorsque f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ , l'expression (19) donne un prolongement analytique de (18) sur le demi-plan $\text{Re}(\mu+n) > 0$ si pour tout k entier variant de 1 à n , $\lim_{t \rightarrow 0} (d^k/d(\text{ch } \sigma t)^k) f(t) = 0$.

De plus, on a les formules suivantes:

$$(20) \quad \mathfrak{R}_0^\sigma = \text{id}, \quad \mathfrak{R}_{\mu+\nu}^\sigma = \mathfrak{R}_\mu^\sigma \circ \mathfrak{R}_\nu^\sigma \quad \text{pour tout } \mu, \nu \in \mathbb{C},$$

$$\mathfrak{R}_\mu^\sigma \left(\frac{d}{d \text{ch } \sigma t} f \right) (s) = \frac{d}{d \text{ch } \sigma s} \mathfrak{R}_\mu^\sigma(f)(s) = \mathfrak{R}_{\mu-1}^\sigma(f)(s) \quad \text{pour tout } \mu \in \mathbb{C}, s \geq 0$$

et tout $f \in \mathcal{C}_\delta^\infty$.

Lorsque f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ , $\mathfrak{R}_{-1}^\sigma(f)(s) = (d/d \text{ch } \sigma s) f(s) + f(0)T$, où T est une distribution de support $\{0\}$. Ceci provient du fait que

$$\mathfrak{R}_{-1}^\sigma(f)(t) = \lim_{\mu \rightarrow -1} \mathfrak{R}_\mu^\sigma(f)(t) = f(0) \frac{(\text{ch } \sigma t - 1)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} + \frac{df}{d \text{ch } \sigma s}(0) \frac{(\text{ch } \sigma t - 1)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+2)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^t \frac{d^2 f}{d(\text{ch } \sigma s)^2}(s) (\text{ch } \sigma t - \text{ch } \sigma s)^{\mu+1} d \text{ch } \sigma s.$$

Précisons enfin que pour tout $\mu \in \mathbb{C}$ et tout $\sigma > 0$, \mathfrak{R}_μ^σ est une bijection de $\mathcal{C}_\delta^\infty$ sur $\mathcal{C}_\delta^\infty$.

Ecrivons en utilisant les transformations \mathfrak{W}_μ^σ et \mathfrak{R}_μ^σ les relations fondamentales liant les fonctions de Jacobi entre elles:

a) La formule [9, (2.14)] valable pour $t \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}, \text{Re}(\alpha) > -1$ et $\text{Re}(\mu) > 0$ s'écrit

$$(21) \quad \frac{\omega_{\alpha+\mu,\beta+\mu}(t)\varphi_{\alpha+\mu,\beta+\mu}(\lambda,t)}{\Gamma(\alpha+\mu+1) \text{sh } 2t} = 2^{-\mu} \mathfrak{R}_\mu^\sigma \left(\frac{\omega_{\alpha,\beta}(\cdot)\varphi_{\alpha,\beta}(\lambda,\cdot)}{\Gamma(\alpha+1) \text{sh } 2\cdot} \right) (t)$$

et s'étend, par exemple, à $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}_+$ avec $\text{Re}(\mu) > -\text{Re}(\alpha)$ et $-(\alpha + 1) \notin \mathbb{N}$.

b) La formule [9, (2.15)] valable pour $t \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}(\mu) > 0$ et $\text{Im}(\lambda) > -\text{Re}(\alpha + \beta + 1) + 2 \text{Re}(\mu)$ s'écrit:

$$(22) \quad \frac{\Phi_{\alpha-\mu, \beta-\mu}(\lambda, t)}{c_{\alpha-\mu, \beta-\mu}(-\lambda)} = 2^{3\mu} \mathcal{W}_\mu^2 \left(\frac{\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, \cdot)}{c_{\alpha, \beta}(-\lambda)} \right) (t)$$

et est prolongeable à tout $\mu \in \mathbb{C}$, dès que $\text{Im}(\lambda) > -\text{Re}(\alpha + \beta + 1) + 2 \text{Re}(\mu)$. Cette formule (22) permet d'obtenir, en tenant compte de (5), "une formule duale" de (21):

$$(23) \quad \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = 2^{3\mu} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu + 1)} \frac{c_{\alpha, \beta}(\lambda) c_{\alpha, \beta}(-\lambda)}{c_{\alpha + \mu, \beta + \mu}(\lambda) c_{\alpha + \mu, \beta + \mu}(-\lambda)} \mathcal{W}_\mu^2(\varphi_{\alpha + \mu, \beta + \mu}(\lambda, \cdot))(t),$$

lorsque $|\text{Im}(\lambda)| < \text{Re}(\alpha + \beta + 1)$.

Cas particulier. Lorsque $\beta = -\frac{1}{2}$, les formules ci-dessus deviennent, en utilisant (7) et (5),

$$(24) \quad \varphi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t) = \frac{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \omega_{\alpha, -1/2}(t)} \text{sh } t \mathcal{R}_{\alpha+1/2}^1 \left(\frac{\cos \lambda \cdot}{\text{sh} \cdot} \right) (t)$$

et, lorsque $\text{Im}(\lambda) > -\text{Re}(\alpha + \frac{1}{2})$,

$$(25) \quad \varphi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t) = 2^{-3(\alpha+1/2)} c_{\alpha, -1/2}(-\lambda) \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}^1(e^{i\lambda \cdot})(t).$$

Remarquons que les formules (21) et (24) permettent de réécrire (16)(ii) à l'aide des transformations intégrales fractionnaires:

$$(26) \quad 2^{2\rho} \omega_{\alpha, \beta}(t) \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = 2^{3(\alpha+1/2)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}} \text{sh } 2t \left[\mathcal{R}_{\beta+1/2}^2 \frac{1}{2 \text{ch } s} \left(\mathcal{R}_{\alpha-\beta}^1 \left(\frac{\cos \lambda \cdot}{\text{sh} \cdot} \right) \right) (s) \right] (t).$$

De même à l'aide de la formule (23) et de la formule suivante obtenue de manière similaire lorsque $\beta = -\frac{1}{2}$:

$$\varphi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t) = \frac{2^{-3(\alpha+1/2)} \Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}} c_{\alpha, -1/2}(\lambda) c_{\alpha, -1/2}(-\lambda) \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}^1(\cos \lambda \cdot)(t)$$

on obtient une "formule duale" de la formule (26), valable lorsque $|\text{Im}(\lambda)| < \text{Re}(\alpha + \beta + 1)$:

$$\frac{\varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)}{c_{\alpha, \beta}(\lambda) c_{\alpha, \beta}(-\lambda)} = \frac{2^{-3(\alpha+1/2)} \Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}} \mathcal{W}_{-(\beta+1/2)}^2 \circ \mathcal{W}_{\beta-\alpha}^1(\cos \lambda \cdot)(t).$$

(Pour $t=0$ cette formule nous donne une nouvelle évaluation de la mesure de Plancherel.) Enfin, à l'aide des formules (22) et (25) on retrouve dans une autre forme la formule [9, (2.17)]:

$$(27) \quad \frac{\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)}{c_{\alpha, \beta}(-\lambda)} = 2^{-3(\alpha+1/2)} \mathcal{W}_{-\beta-1/2}^2 \circ \mathcal{W}_{\beta-\alpha}^1(e^{i\lambda \cdot})(t)$$

lorsque $\text{Im}(\lambda) > -\text{Re}(\alpha + \beta + 1), \text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\beta - \alpha)$.

C'est cette dernière formule qui est le point de départ de la transformation de Laplace-Jacobi, objet de cet article.

4. La transformation de Laplace-Jacobi.

PROPOSITION 4.1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans \mathbb{R}_+^* , soit $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$; alors, pour $\text{Im}(\lambda) > \text{Max}(-\text{Re}(\alpha + \beta + 1), \text{Re}(\beta - \alpha))$, on a

$$(28) \quad \mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f)(\lambda) = 2^{-3(\alpha+1/2)} \mathcal{L}_{-1/2, -1/2} \left[\text{sh} \mathcal{R}_{\beta-\alpha}^1 \circ \text{ch} \mathcal{R}_{-\beta-1/2}^2 \left(\frac{f}{\text{sh ch}} \right) \right](\lambda).$$

La considération des pôles de $c_{\alpha, \beta}(-\lambda)^{-1}$ permet de dire que $(\alpha, \beta, \lambda) \rightarrow \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) / c_{\alpha, \beta}(-\lambda)$ est holomorphe pour tout $t > 0$ dans la région $\text{Im}(\lambda) > \text{Max}(-\text{Re}(\alpha + \beta + 1); \text{Re}(\beta - \alpha - 1))$ ainsi en utilisant la formule (27) après permutations d'intégrales, on a le résultat.

De plus, la formule (28) a un sens pour $\text{Im}(\lambda) > -\text{Re}(\alpha + \beta + 1)$ et la formule (17) pour $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1 - i\lambda) \notin -\mathbb{N}$ et $\frac{1}{2}(\alpha - \beta + 1 - i\lambda) \notin -\mathbb{N}$. Les formules (17) et (28) constituent des prolongements analytiques l'une de l'autre.

Remarque 4.2. i) $\mathcal{L}_{-1/2, -1/2}$ est la transformation de Laplace usuelle pour la variable $-i\lambda$. Ainsi, de même que la transformation de Fourier-Jacobi $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}$ s'interprète comme une généralisation de la transformation de Fourier en cosinus, la transformation $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ s'interprète comme généralisation de la transformation de Laplace.

ii) En utilisant les formules (5), (9) et (17) on a, pour f de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans \mathbb{R}_+^* , pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha + \beta + 1) > 0$ et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\text{Im}(\lambda)| < \text{Re}(\alpha + \beta + 1)$,

$$(29) \quad \frac{1}{c_{\alpha, \beta}(\lambda)c_{\alpha, \beta}(-\lambda)} \mathcal{F}_{\alpha, \beta}(f)(\lambda) = \frac{2^{2\rho}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f(\cdot)\omega_{\alpha, \beta}(\cdot))(\lambda) + \mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f(\cdot)\omega_{\alpha, \beta}(\cdot))(-\lambda) \right\}.$$

De plus, pour $\text{Re}(\alpha) > -\frac{1}{2}$ et $|\text{Re}(\beta)| < \text{Re}(\alpha + 1)$, on obtient une première formule d'inversion:

$$f(t) = \frac{2^{2\rho}}{\Gamma(\alpha + 1)\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f(\cdot)\omega_{\alpha, \beta}(\cdot))(\lambda) \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) d\lambda.$$

LEMMA 4.3. (cf. [9, Lemmes (2.1) et (2.2)]).

(i) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin -\mathbb{N}^*$, pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour tout $t > \delta$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda) \geq 0$, on a:

$$|\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)| \leq K_1 e^{-(\text{Im}(\lambda) + \text{Re}(\rho))t}.$$

(ii) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pour tout $r > 0$, il existe une constante $K_2 > 0$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda) \geq 0$, $\text{Im}(\lambda) \geq -\text{Re}(\rho) + r$ et $\text{Im}(\lambda) \geq -\text{Re}(\alpha - \beta + 1) + r$, on a:

$$\left| \frac{1}{c_{\alpha, \beta}(-\lambda)} \right| \leq K_2 (1 + |\lambda|)^{\text{Re}(\alpha) + 1/2}.$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{C}_{\delta, a} = \{f \in \mathcal{C}_\delta | \exists K > 0, |f(t)| \leq Ke^{at} \text{ pour tout } t > 0\}$, et soit $\mathcal{C}_{\delta, a}^\infty = \{f \in \mathcal{C}_\delta | \forall k \in \mathbb{N}, (\frac{d}{dt})^k f \in \mathcal{C}_{\delta, a}\}$.

LEMME 4.4. Soit $f \in \mathcal{C}_{\delta, a}^\infty$ et soit $\mu \in \mathbb{C}$, alors $\mathcal{R}_\mu^\sigma(f) \in \mathcal{C}_{\delta, a + \text{Re}(\mu)}^\infty$ pour $a > 0$; c'est-à-dire \mathcal{R}_μ^σ est une bijection de $\mathcal{C}_{\delta, a}^\infty$ sur $\mathcal{C}_{\delta, a + \sigma \text{Re}(\mu)}^\infty$ lorsque $a > 0$.

En utilisant le fait que pour $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\mu) > 0$, $\text{Re}(\nu) > 0$ et $t > 0$: $\mathfrak{R}_\mu^\sigma((\text{ch } \sigma s)^{\nu-1})(t) = (\Gamma(\nu)/\Gamma(\mu+\nu))[(\text{ch } \sigma t)^{\mu+\nu-1} - 1]$, cf. [5, 13.1.(7)], on obtient, pour $a > -\sigma$, $\text{Re}(\mu) > 0$ et $f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$: $\mathfrak{R}_\mu^\sigma(f) \in \mathcal{C}_{\delta,a+\sigma \text{Re}(\mu)}^\infty$.

En remarquant ensuite que pour $r \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$ on a $e^{rt}f \in \mathcal{C}_{\delta,a+r}^\infty$, et du fait que pour $f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$ on a

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{R}_\mu^\sigma(f)(t) = \text{sh } \sigma t \mathfrak{R}_\mu^\sigma \left(\frac{1}{\text{sh } \sigma s} \frac{d}{ds} f(s) \right) (t),$$

alors pour $f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$ on a $\mathfrak{R}_\mu^\sigma(f) \in \mathcal{C}_{\delta,a+\sigma \text{Re}(\mu)}^\infty$ lorsque $a > 0$ et $\text{Re}(\mu) > 0$. Enfin pour $\mu \in \mathbb{C}$ on utilise le fait que si $f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$ alors $\mathfrak{R}_{-1}^\sigma(f) = (d/d \text{ch } \sigma t) f \in \mathcal{C}_{\delta,a-\sigma}^\infty$.

Remarque. Pour $a \leq 0$, on obtient pour $f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$, $\mathfrak{R}_\mu^\sigma(f) \in \mathcal{C}_{\delta, \text{Max}(0, a+\sigma \text{Re}(\mu))}^\infty$.

PROPOSITION 4.5. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$.

(i) Soit $f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$; alors $\lambda \mapsto \mathcal{L}_{\alpha,\beta}(f)(\lambda)$ est holomorphe dans le demi-plan $\text{Im}(\lambda) > b = \text{Max}(a - \text{Re}(\rho), 0, -\text{Re}(\rho), -\text{Re}(\alpha - \beta + 1))$ et pour tout $r > 0$ il existe $K > 0$ tel que

$$|\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(f)(\lambda)| \leq K(1 + |\lambda|)^{\text{Re}(\alpha+1/2)} e^{-\delta \text{Im}(\lambda)} \quad \text{pour tout } \lambda, \text{Im}(\lambda) \geq b + r.$$

(ii) Soit $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$; alors $t \rightarrow \text{sh } t [\mathfrak{R}_{\beta-\alpha}^1 \circ \text{ch } \mathfrak{R}_{\beta-1/2}^2 (f/\text{sh } \text{ch})](t)$ appartient à $\mathcal{C}_{\delta,a-\text{Re}(\rho)}^\infty$; en conséquence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $K > 0$, tel que

$$|\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(f)(\lambda)| \leq \frac{K}{(1 + |\lambda|)^k} e^{-\delta \text{Im}(\lambda)} \quad \text{dès que } \text{Im}(\lambda) > a - \text{Re}(\rho).$$

(i) est une conséquence du lemme 4.3, appliqué à la formule (17); (ii) est une conséquence du lemme 4.4, de la proposition 4.1. (formule (28)) et des propriétés élémentaires de la transformation de Laplace $\mathcal{L}_{-1/2, -1/2}$.

Remarques 4.6. (i) Soit D_2 l'opérateur défini sur $\mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$ par

$$D_2(f)(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{2 \text{sh } 2t} \right) = \text{sh } 2t \frac{d}{d \text{ch}(2t)} \left(\frac{f(t)}{\text{sh } 2t} \right),$$

on a

$$D_2(f)(t) = \frac{d}{d \text{ch } 2t} f(t) - \frac{1}{\text{sh } 2t} \coth 2t f(t)$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(D_2^k(f)) = 2^{3k} \mathcal{L}_{\alpha+k, \beta+k}(f)$.

(ii) Considérons le cas particulier $\beta = -\frac{1}{2}$; un certain nombre de formules se simplifient, notamment

$$\mathcal{L}_{\alpha, -1/2}(f)(\lambda) = 2^{-3(\alpha+1/2)} \mathcal{L}_{-1/2, -1/2} \left(\text{sh } \mathfrak{R}_{-(1/2)-\alpha}^1 \left(\frac{f}{\text{sh}} \right) \right) (\lambda).$$

Ainsi, on peut reformuler sans difficulté la proposition 4.5(ii), en considérant l'espace de fonctions $\mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$. Par ailleurs, si l'on pose, pour $f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty$, $D_1(f) = \frac{d}{dt} (f(t)/\text{sh}(t))$, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_{\alpha, -1/2} \circ D_1^k = 2^{3k} \mathcal{L}_{\alpha+k, -1/2}$.

(iii) Enfin, en considérant les formules (7) et (17), le cas particulier $\alpha = \beta$ se ramène au cas $\beta = -\frac{1}{2}$ par la formule

$$\mathcal{L}_{\alpha,\alpha}(f(t))(2\lambda) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\alpha, -1/2} \left(f \left(\frac{t}{2} \right) \right) (\lambda), \quad \text{lorsque } f \in \mathcal{C}_{\delta,a}^\infty.$$

5. La formule d'inversion. Pour établir la transformation inverse de la transformation de Laplace-Jacobi, procédons formellement en inversant la formule (28).

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et soit $\lambda \mapsto g(\lambda)$ une fonction holomorphe sur un demi-plan $\text{Im}(\lambda) > b$, et telle que $\frac{1}{\pi} \int_{ia-\infty}^{iu+\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda u} d\lambda$ existe et ne dépende pas de $a > b$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.

Nous avons alors:

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{-1}(g)(t) = 2^{3(\alpha+1/2)} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \mathcal{R}_{\beta+1/2}^2 \left[\frac{1}{\operatorname{ch}} \mathcal{R}_{\alpha-\beta}^1 \left(\frac{1}{\operatorname{sh}} \mathcal{E}_{-1/2,-1/2}^{-1}(g) \right) \right](t).$$

C'est-à-dire si, par exemple, $\operatorname{Re}(\beta) > -\frac{1}{2}$ et $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{-1}(g)(t) &= 2^{3(\alpha+1/2)} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \frac{1}{\Gamma(\beta+\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{2 \operatorname{sh} 2s \operatorname{d}s}{\operatorname{ch} s (\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2s)^{1-\beta-1/2}} \\ &\times \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^s \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{d}u}{\operatorname{sh} u (\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} u)^{1-\alpha+\beta}} \times \frac{1}{\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda u} \operatorname{d}\lambda \end{aligned}$$

et en intervertissant (toujours formellement) les intégrales:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{-1}(g)(t) &= 2^{3(\alpha+1/2)} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \frac{1}{\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} g(\lambda) \times \frac{1}{\Gamma(\beta+\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{2 \operatorname{sh} 2s \operatorname{d}s}{\operatorname{ch} s (\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2s)^{1-\beta-1/2}} \\ &\times \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^s \frac{e^{-i\lambda u} \operatorname{sh} u \operatorname{d}u}{\operatorname{sh} u (\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} u)^{1-\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

Posons alors, par définition, pour $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > -\frac{1}{2}$

$$(30) \quad \psi_{\alpha,\beta}(\lambda, t) = 2^{3(\alpha+1/2)} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \left[\mathcal{R}_{\beta+1/2}^2 \frac{1}{\operatorname{ch}} \mathcal{R}_{\alpha-\beta}^1 \left(\frac{e^{-i\lambda \cdot}}{\operatorname{sh} \cdot} \right) \right](t)$$

et

$$(31) \quad \check{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} g(\lambda) \psi_{\alpha,\beta}(\lambda, t) \operatorname{d}\lambda.$$

Etudions alors les conditions d'existence de ces formules (30) et (31).

PROPOSITION 5.1. Soit $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Lorsque $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > -\frac{1}{2}$, $\psi_{\alpha,\beta}(\lambda, t) = \int_0^t e^{-i\lambda s} A_{\alpha,\beta}(s, t) \operatorname{d}s$, où $A_{\alpha,\beta}$ est défini par la formule (16) (iii).

De plus, il existe une constante $K \geq 0$ telle que pour tout λ ,

$$\operatorname{Im}(\lambda) > 0, |\psi_{\alpha,\beta}(\lambda, t)| \leq K(1+t) e^{(\operatorname{Im}(\lambda) + \operatorname{Re}(\rho))t}.$$

Cette proposition est une conséquence de la définition de $A_{\alpha,\beta}$; la majoration repose sur son expression à l'aide de la fonction hypergéométrique.

Remarques 5.2. (i) Pour $k \in \mathbb{N}$, pour $\operatorname{Re}(\alpha - k) > \operatorname{Re}(\beta - k) > -\frac{1}{2}$ on a

$$\psi_{\alpha-k,\beta-k}(\lambda, t) = 2^{-3k} D_2^k \psi_{\alpha,\beta}(\lambda, t).$$

(ii) Lorsque $\alpha = \beta$ avec $\operatorname{Re}(\beta) > -\frac{1}{2}$, ou lorsque $\operatorname{Re}(\alpha) > \beta = -\frac{1}{2}$, $\psi_{\alpha,\beta}$ a un sens, par exemple

$$\psi_{\alpha,-1/2}(\lambda, t) = 2^{3(\alpha+1/2)} \operatorname{sh} t \mathcal{R}_{\alpha+1/2}^1 \left(\frac{e^{-i\lambda s}}{\operatorname{sh} s} \right)(t).$$

(iii) En utilisant la formule (16) (ii), on obtient la relation suivante lorsque $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > -\frac{1}{2}$:

$$(32) \quad \psi_{\alpha,\beta}(\lambda, t) + \psi_{\alpha,\beta}(-\lambda, t) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1)} 2^{2\rho} \omega_{\alpha,\beta}(t) \varphi_{\alpha,\beta}(\lambda, t).$$

(iv) En appliquant \mathcal{R}_μ^2 à la formule (30), on obtient pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\mu) > 0$,

$$(33) \quad \frac{\psi_{\alpha+\mu, \beta+\mu}(\lambda, t)}{\text{sh } 2t} = 2^{3\mu} \mathcal{R}_\mu^2 \left(\frac{\psi_{\alpha, \beta}(\lambda, s)}{\text{sh } 2s} \right) (t);$$

de même, en appliquant \mathcal{R}_μ^1 à (ii) ci-dessus, on obtient pour $\text{Re}(\mu) > 0$,

$$(34) \quad \frac{\psi_{\alpha+\mu, -1/2}(\lambda, t)}{\text{sh } t} = 2^{3\mu} \mathcal{R}_\mu^1 \left(\frac{\psi_{\alpha, -1/2}(\lambda, s)}{\text{sh } s} \right) (t).$$

Notations 5.3. Soit $\delta > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{H}_{\delta, a}$ l'espace des fonctions holomorphes, $\lambda \rightarrow g(\lambda)$, sur le demi-plan $\text{Im}(\lambda) > a$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $K_n > 0$ pour laquelle $|g(\lambda)| \leq (K_n / (1 + |\lambda|)^n) e^{-\delta \text{Im}(\lambda)}$.

THÉORÈME 5.4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$.

(i) Soit $a > 0$, $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ est une bijection de $\cap_{b>a} \mathcal{C}_{\delta, b}^\infty$ sur $\cap_{b>a} \mathcal{H}_{\delta, b-\text{Re}(\rho)}$.

(ii) De plus, si $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -\frac{1}{2}$, pour $a > -\text{Re}(\rho)$, la bijection réciproque est donnée par $g \rightarrow \check{g}$ où $\check{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} g(\lambda) \psi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) d\lambda$ est indépendant de $b > a$, et pour $g \in \mathcal{H}_{\delta, a}$, $\check{g} \in \mathcal{C}_{\delta, a+\text{Re}(\rho)+\varepsilon}^\infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(i) est une conséquence de la proposition 4.5(ii) et des propriétés de la transformation de Laplace $\mathcal{L}_{-1/2, -1/2}$, en utilisant la formule (28).

(ii) Par la formule de Cauchy et la majoration de la proposition 5.1, on obtient l'indépendance de $\check{g}(t)$ vis à vis de $b > a$. D'autre part, comme $|\check{g}(t)| \leq K(1+t)e^{b(t-\delta)}e^{\text{Re}(\rho)t}$, lorsque $b \rightarrow +\infty$, on obtient $\check{g}(t) = 0$ si $0 \leq t < \delta$ et, si b tend vers a , on obtient $|\check{g}(t)| \leq K_1 e^{(\text{Re}(\rho)+a+\varepsilon)t}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Comme $g \in \mathcal{H}_{\delta, a}$, on a également:

$$\check{g}(t) = 2^{3(\alpha+1/2)} \text{sh } t \text{ ch } t \mathcal{R}_{\beta+1/2}^2 \circ \frac{1}{\text{ch}} \mathcal{R}_{\alpha-\beta}^1 \circ \frac{1}{\text{sh}} \mathcal{L}_{-1/2, -1/2}^{-1}(g(\cdot))(t);$$

en particulier \check{g} est continue donc $\check{g} \in \mathcal{C}_{\delta, a}$ et par la proposition 4.5(i) $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(\check{g}) = g$.

Cas particulier: $\beta = -\frac{1}{2}$. En tenant compte des remarques 4.6(ii) et 5.2(ii), la théorème ci-dessus peut se reformuler sous la forme suivante dans ce cas limite.

COROLLAIRE 5.5. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > \beta = -\frac{1}{2}$, soit $a > 0$ et $\delta > 0$. Pour $f \in \mathcal{C}_{\delta, a}^\infty$, $\mathcal{L}_{\alpha, -1/2}(f) \in \mathcal{H}_{\delta, a-\text{Re}(\rho)+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $b > a - \text{Re}(\rho)$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} \mathcal{L}_{\alpha, -1/2}(f)(\lambda) \psi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t) d\lambda.$$

Remarques 5.6. (i) Un corollaire analogue peut être obtenu lorsque $\alpha = \beta$ en utilisant les formules de passages (7) et la remarque 4.6(iii).

(ii) Soit $-\text{Re}(\rho) < a < 0$, pour $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -\frac{1}{2}$, pour $g \in \mathcal{H}_{\delta, a}$ et g paire, on a:

$$\check{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \psi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) d\lambda = \frac{2^{2\rho+1}}{\Gamma(\alpha+1)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty g(\lambda) \omega_{\alpha, \beta}(t) \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) d\lambda.$$

(iii) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -\frac{1}{2}$, soit $0 < a < \text{Re}(\rho)$ et soit $f \in \mathcal{C}_{\delta, a}^\infty$, les deux formules d'inversion sont valables et on a donc:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f)(\lambda) \psi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) d\lambda = \frac{2^{2\rho}}{\Gamma(\alpha+1)\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f\omega_{\alpha, \beta})(\lambda) \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) d\lambda.$$

Si de plus, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f à valeurs réelles, on a $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f)(-\lambda) = \overline{\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f)(\lambda)}$ et donc

$$f(t) = \frac{2^{2\rho}}{\Gamma(\alpha+1)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty 2\text{Re}[\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(f\omega_{\alpha, \beta})(\lambda)] \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) d\lambda;$$

on retrouve la formule [1, (3.13), théorème 3.5], de R. Carroll.

6. Transformations de Bessel; opérateurs de Chébli. Une situation analogue à la transformation de Laplace-Jacobi est fournie par une transformation de Bessel.

Soit la mesure $A_\nu(t) dt = t^{2\nu+1} dt$ sur \mathbb{R}_+ ; où $\nu \in \mathbb{C}$.

Soit $\Delta_\nu = (1/A_\nu(t)) \frac{d}{dt} (A_\nu(t) \frac{d}{dt})$; dans ce cas $\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} (A'_\nu(t)/A_\nu(t)) = 0$.

Considérons $\varphi_\nu(\lambda, t)$ et $\Phi_\nu(\lambda, t)$ les solutions de l'opérateur de Bessel: $\Delta_\nu = -\lambda^2$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$; ces solutions vérifient:

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(\lambda, 0) &= 1, & \varphi'_\nu(\lambda, 0) &= 0, \\ \Phi_\nu(\lambda, t) t^{\nu+1/2} &= e^{i\lambda t} (1 + \varepsilon(t)) \quad \text{avec } \varepsilon(t) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On a $\varphi_\nu(\lambda, t) = \Gamma(\nu+1)(\lambda t/2)^{-\nu} J_\nu(\lambda t)$ et $\Phi_\nu(\lambda, t) = ((-i\lambda)^{1/2}/\pi)(K_\nu(-i\lambda t)/t^\nu)$ où J_ν est la fonction de Bessel de 1-ère espèce et K_ν une autre fonction de Bessel (parfois appelée fonction de Bessel de 3-ème espèce).

Soit la transformation que nous appellerons transformation de Laplace-Bessel: $\mathcal{L}_\nu(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \Phi_\nu(\lambda, t) t^{2\nu+1} dt$. Alors en utilisant les propriétés de la transformation de Meijer, cf. Ditkine et Proudnikov [3, Chap. III], on obtient la transformation réciproque:

$$\mathcal{L}_\nu^{-1}(g)(t) = \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} g(\lambda) \psi_\nu(\lambda, t) \lambda^{\nu+1/2} d\lambda,$$

où $\psi_\nu(\lambda, t) = (-i)^{1/2} (-i\lambda t)^{-\nu} J_\nu(\lambda t)$ est proportionnelle à $\varphi_\nu(\lambda, t)$.

Il nous semble que le contexte général pour unifier ces transformations de Laplace généralisées soit celui des opérateurs de Chébli:

Soit $A(t) dt$ une mesure sur \mathbb{R}_+ définie par une fonction A vérifiant les hypothèses suivantes (cf. H. Chébli [2]):

1°) $\alpha \in \mathbb{R}$, $A'(t)/A(t) = \alpha/t + B(t)$ où B est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et impaire.

2°) $A(0) = 0$, A croissante et A tend vers l'infini avec t ; A'/A décroissante.

Posons $\rho = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (A'(t)/A(t))$; soit Δ_A l'opérateur $(1/A(t)) \frac{d}{dt} (A(t) \frac{d}{dt})$; pour $\lambda \in \mathbb{C}$; il existe une solution $\varphi_A(\lambda, t)$ de $\Delta_A f = -(\lambda^2 + \rho^2)f$ telle que $\varphi_A(\lambda, 0) = 1$ et $\varphi'_A(\lambda, 0) = 0$. De plus dans les cas importants que nous avons vu, il existe une deuxième solution linéairement indépendante de φ_A telle que

$$\Phi_A(\lambda, t) \sqrt{A(t)} = e^{i\lambda t} (1 + \varepsilon(t)) \quad (\text{avec } \varepsilon(t) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty).$$

Dans ce cadre, la A -transformation de Fourier $f \rightarrow \mathcal{F}_A(f)$ est bien définie par

$$\mathcal{F}_A(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \varphi_A(\lambda, t) A(t) dt.$$

Une analyse harmonique a été établie (théorème de Plancherel, formule d'inversion, théorème de Paley-Wiener, etc.) par H. Chébli [2] et plus récemment développée par K. Trimèche [13].

On peut alors définir une A -transformation de Laplace en posant $\mathcal{L}_A(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \Phi_A(\lambda, t) A(t) dt$, ou encore, en tenant compte du coefficient de normalisation $c_A(\lambda)$ défini à partir du Wronskien W de $\Phi_A(\lambda, \cdot)$ et $\varphi_A(\lambda, \cdot)$ par la formule

$$-2i\lambda c_A(\lambda) = A(t) W[\Phi_A(-\lambda, t), \varphi_A(\lambda, t)],$$

on peut définir la A -transformation de Laplace en posant par exemple:

$$(35) \quad \mathcal{L}_A(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \frac{\Phi_A(\lambda, t)}{c_A(\lambda)} dt.$$

Pour avancer dans l'étude d'une A -transformation de Laplace, on pourra partir des transformations intégrales de Riemann-Liouville et de Weyl généralisées associées à la fonction $A(t)$ par K. Trimèche [13]. Ces transformations sont liées à l'opérateur de transmutation \mathcal{X} tel que: $(\Delta_A + \rho^2)\mathcal{X}f = \mathcal{X}(d^2/dt^2)f$ (voir également J. L. Lions [10]).

7. Transformations radiales sur certains groupes de Lie semi-simples. Le corps \mathbb{K} désigne soit le corps \mathbb{R} , soit le corps \mathbb{C} , soit le corps \mathbb{H} des quaternions. Soit $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$ et soit p et q deux entiers strictement positifs. Soit \mathbb{K}^{p+q} muni de la pseudo-métrique (p, q) associée à la pseudo-norme définie pour $x = (x_i)_{i=1, \dots, p+q}$ par $\|x\|_{p,q}^2 = \sum_{i=1}^p |x_i|^2 - \sum_{i=p+1}^q |x_i|^2$. Considérons les groupes de Lie connexes semi-simples et leurs sous-groupes suivants qui agissent canoniquement sur \mathbb{K}^{p+q} en laissant la pseudo-métrique (p, q) invariante:

$d=1$	$d=2$	$d=4$
$G = SO_0(p, q)$	$G = SU(p, q)$	$G = Sp(p, q)$
$K = SO(p) \times SO(q)$	$K = S((U(p) \times U(q)))$	$K = Sp(p) \times Sp(q)$
$H = SO_0(p-1, q)$	$H = S(U(p-1, q) \times U(1))$	$H = Sp(p-1, q) \times Sp(1)$

Soit $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa de G relative au sous-groupe compact maximal K . Il existe un sous-groupe à un paramètre A_0 de A tel que nous avons une décomposition du type Iwasawa et une décomposition du type Cartan relatives au sous-groupe H . Plus précisément, soit $W_{H,K}$ le groupe de Weyl défini par $W_{H,K} = M_{H \cap K}^*(A_0) / M_{H \cap K}(A_0)$ où $M_{H \cap K}^*(A_0)$ est le normalisateur de A_0 dans $H \cap K$ et $M_{H \cap K}(A_0)$ est le centralisateur de A_0 dans $H \cap K$.

PROPOSITION 7.1. (Oshima et Sékiguchi [11]). *i) Décomposition du type Iwasawa: il existe un sous-groupe nilpotent N_0 de G tel que $G = HA_0N_0$ et tel que si $g \in HA_0N_0$, la décomposition est unique.*

ii) Décomposition du type Cartan: $G = KA_0H$ ou plus précisément $K/M_{H \cap K}(A_0) \times (A_0 - \{e\})/W_{H,K}$ s'identifie à un ouvert partout dense de l'espace pseudo-riemannien symétrique G/H .

iii) Une mesure de Haar dg sur G s'écrit: $dg = dk A_{p,q,d}(t) dt dh$ sur la décomposition $G = KA_0H$ où dk et dh sont des mesures de Haar sur K et H respectivement et où $A_{p,q,d}(t) = (sh t)^{dq-1} (ch t)^{dp-1}$.

iv) La restriction de l'opérateur de Casimir Ω à l'ensemble des fonctions analytiques sur G , invariants à droite par H et à gauche par K est donnée par:

$$[2d(p+q+2) - 8]\Omega = \frac{d^2}{dt^2} + [(dq-1) \coth t + (dp-1) \operatorname{th} t] \frac{d}{dt}.$$

Cette proposition (très classique pour $p=1$) résume des cas particuliers de résultats établis par Oshima et Sékiguchi [11] lorsque $q=1$ et par Sékiguchi [12] lorsque $p > 1$ et $q > 1$. Ces auteurs, en utilisant également une décomposition du type décomposition de Bruhat à partir du sous-groupe M_0 centralisateur de A_0 dans H , étudient une frontière $\Gamma = G/M_0A_0N_0$ de l'espace pseudo-riemannien symétrique G/H et définissent une transformation de Poisson pour laquelle ils obtiennent des résultats analogues à ceux (classiques) correspondant aux espaces riemanniens symétriques. Voir également Faraut [7].

Ainsi, l'espace des doubles classes $K \backslash G/H$ s'identifie à \mathbb{R}_+ (parfois à \mathbb{R} lorsque $q=d=1$), muni de la mesure $A_{p,q,d}(t) dt$ et du Laplacien $(1/A_{p,q,d}(t)) \frac{d}{dt} (A_{p,q,d}(t) \frac{d}{dt})$. Nous avons donc une transformation de Fourier $\mathcal{F}_{(dq-2)/2, (dp-2)/2}$ et une transformation de Laplace $\mathcal{L}_{(dq-2)/2, (dp-2)/2}$ pour les fonctions sur G invariants à droite par H et

à gauche par K . De plus, lorsque $dp \leq dq + 2$ la formule (10) précise la transformation inverse de la transformation de Fourier, et lorsque $p \leq q$ le théorème 5.4 précise la transformation inverse de la transformation de Laplace.

8. Éléments pour une interprétation géométrique sur les groupes $G = SO_0(1, n)$.

Dans ce paragraphe, nous examinons le cas particulier $\beta = -\frac{1}{2}$, $\text{Re}(\alpha) > -\frac{1}{2}$. En effet pour $\alpha = (n - 2)/2$, où n est un entier supérieur ou égal à 2, l'interprétation géométrique passe par le groupe $SO_0(1, n)$.

RAPPELS. Soit $G = SO_0(1, n)$, soit $G = KAN$ sa décomposition d'Iwasawa, KA^+K , celle de Cartan. Soit M le centralisateur de A dans K , $K \simeq SO(n)$; $A \simeq \mathbb{R}$, $M \simeq SO(n - 1)$; soit $H \simeq SO_0(1, n - 1)$ le sous-groupe de G admettant M comme sous-groupe compact maximal.

Les fonctions sphériques $\varphi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t)$ sont les moyennes d'une puissance du noyau de Poisson, moyenne sur le bord K/M de l'espace homogène G/K . Le noyau de Poisson $P(g, \gamma)$ défini sur $G \times K/M$ étant la dérivée de Radon-Nikodým de l'action canonique de G sur $K/M = G/MAN$. Plus précisément, soit $g \in G$ et $\gamma = \dot{g}_1 \in \Gamma = K/M = G/MAN$, alors $g \cdot \gamma = \widehat{gg}_1 \in \Gamma$; soit $d\gamma$ la mesure image sur K/M de la mesure de Haar dk sur K , alors $P(g, \gamma) = (dg \cdot \gamma) / d\gamma$ c'est-à-dire pour toute fonction continue f à support compact sur Γ , $\int_{\Gamma} f(g \cdot \gamma) P(g, \gamma) d\gamma = \int_{\Gamma} f(\gamma) d\gamma$, d'où la formule de 2-cocycle vérifiée par le noyau de Poisson $P(g_1 g_2, \gamma) = P(g_1, g_2 \cdot \gamma) P(g_2, \gamma)$ pour $g_1, g_2 \in G$ et $\gamma \in \Gamma$. Cela s'exprime par la formule:

$$(36) \quad \varphi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \frac{(\sin \theta)^{2\alpha} d\theta}{(\text{ch } t + \text{sh } t \cos \theta)^{1/2 + \alpha - i\lambda}},$$

formule valable pour $\text{Re}(\alpha) > -\frac{1}{2}$. Cette formule s'obtient directement en faisant le changement de variable $e^t = \text{ch } t + \text{sh } t \cos \theta$ dans la formule:

$$2^{2\alpha + 1} \omega_{\alpha, -1/2}(t) \varphi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \cos \lambda s A_{\alpha, -1/2}(s, t) ds$$

où

$$A_{\alpha, -1/2}(s, t) = \frac{2^{3(\alpha + 1/2)} \text{sh } t}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) (\text{ch } t - \text{ch } s)^{1/2 - \alpha}};$$

cf. formule (16)(ii), (iii). Dans ces formules, t paramètre le sous-groupe A de $SO_0(1, n)$.

Peut-on trouver une formule similaire à (36) pour les fonction $\Phi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t)$?

PROPOSITION 8.1. Pour $\text{Re}(\alpha) > -\frac{1}{2}$ et pour $\text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\alpha) - \frac{1}{2}$,

$$(37) \quad \Phi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t) = \frac{2^{-2\alpha} \Gamma(1 - i\lambda)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - \alpha - i\lambda)} \int_0^{+\infty} \frac{(\text{sh } \psi)^{2\alpha} d\psi}{(\text{ch } t + \text{sh } t \text{ch } \psi)^{1/2 + \alpha - i\lambda}}.$$

Cette formule (37) se trouve dans l'article de L. Durand [4, formule (16)]. Cette formule nous suggère de la réaliser comme moyenne "d'un noyau de Poisson hyperbolique" sur un "bord" de l'hyperboloïde $SO_0(1, n)/SO(n)$ réalisé dans \mathbb{R}^{n+1} ; c'est ce que nous allons faire:

Quelques notations. Soit $G = SO_0(1, n)$, soit $K = SO(n)$ le sous-groupe compact maximal de G et $M = SO(n - 1)$ le centralisateur de A dans K , où A est le sous-groupe de G provenant de la décomposition d'Iwasawa de $G = KAN$. Soit $H = SO_0(1, n - 1)$ le sous-groupe non compact de G admettant M comme sous-groupe compact maximal. Soit $P = MAN$ le parabolique minimal de G .

Nous noterons encore $X = G/K$ l'espace riemannien symétrique et $\Gamma = G/P = K/M$ sa frontière; nous noterons encore $\Gamma_1 = H/M$ une frontière de l'espace affine symétrique G/H ; pour plus de précisions on pourra se reporter à [11] dont les propositions 1.10 et 2.7 permettent de dire que $H \times A \times N \rightarrow HAN$ est un difféomorphisme de $H \times A \times N$ sur un ouvert de G et que Γ_1 peut s'identifier à un ouvert de Γ . Plus précisément:

Soit

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t & & \\ \text{sh } t & \text{ch } t & & \\ & & & \\ & & & I_{n-1} \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\}, \quad A^+ = \{ a_t \in A / t \in \mathbb{R}_+ \}.$$

Soit

$$A_K = \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & -\sin \theta & \\ & \sin \theta & \cos \theta & \\ & & & I_{n-2} \end{pmatrix} / \theta \in [0, 2\pi[\right\}, \quad A_K^+ = \{ k_\theta \in A / \theta \in [0, \pi[\}.$$

Soit

$$A_H = \left\{ h_\psi = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & 0 & \text{sh } \psi & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \text{sh } \psi & 0 & \text{ch } \psi & \\ & & & I_{n-2} \end{pmatrix} / \psi \in \mathbb{R} \right\}, \quad A_H^+ = \{ h_\psi \in A_H / \psi \in \mathbb{R}_+ \}.$$

Soit

$$M = \left\{ m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \tilde{m} \end{pmatrix} / \tilde{m} \in SO(n-1) \right\}, \quad W = \{ I_{n+1}, k_\pi \}$$

Nous utiliserons les décompositions de Cartan de K et H : $K = MA_K^+ M$ et $H = MA_H^+ M$ munis des mesures $dk = dm(\sin \theta)^{n-2} d\theta dm$ et $dh = dm(\text{sh } \psi)^{n-2} d\psi dm$, où dm est la mesure de Haar normalisée sur M . Le groupe G agit canoniquement sur l'espace de Minkowski \mathbb{R}^{n+1} . Soit C le cône de \mathbb{R}^{n+1} et Ξ l'ensemble des génératrices de ce cône C . Par l'application

$$k \rightarrow k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Γ s'identifie à Ξ et par

$$g \rightarrow g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'espace symétrique $G/K \simeq K/M \times A^+$ s'identifie à la nappe supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes de \mathbb{R}^{n+1} .

D'autre part G agit canoniquement sur Γ ; soit $P(g, \gamma)$ la dérivée de Radon-Nikodym de cette action sur $\Gamma \simeq M/M' \times A_K^+$ muni de la mesure $d\dot{m} d\theta$, où M' est le centralisateur de A_K dans M et $d\dot{m}$ la mesure canonique sur M/M' . On a (cf. [6] par exemple)

$$\varphi_{(n-2)/2, -1/2}(\lambda, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\Gamma} P(a_t, \gamma)^{(n-1)/2 - i\lambda} d\gamma$$

où $d\gamma = d\dot{m}(\sin \theta)^{n-2} d\theta$ est la mesure canonique sur K/M . De plus par l'identification entre Γ et Ξ nous retrouvons exactement la formule (36).

Interprétation géométrique de la formule (37). Soit

$$\Xi_1 = H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

alors la frontière $\Gamma_1 = H/M \simeq M/M' \times A_H^+$ s'identifie à Ξ_1 , partie ouverte de Ξ ; soit

$$\Xi_2 = Hk_{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est la deuxième frontière de l'espace affine symétrique G/H que l'on peut identifier à l'hyperboloïde à une nappe de \mathbb{R}^{n+1} . Les espaces Ξ_1 et Ξ_2 sont deux ouverts disjoints de Ξ et leur réunion est partout dense dans Ξ , cf. [11].

G agit sur Ξ ; considérons G_1 l'ensemble des éléments de G laissant Ξ_1 stable; on obtient:

LEMME 8.2. (i) Pour a_{t_1} et $a_{t_2} \in A^+$ et pour $h_{\psi} \in H$, on a $a_{t_1} h_{\psi} a_{t_2} = h_{\psi_1} a_t h_{\psi_2}$, où h_{ψ_1} et $h_{\psi_2} \in H$ et où a_t unique dans A^+ est défini par $\text{ch } t = \text{ch } t_1 \text{ch } t_2 + \text{sh } t_1 \text{sh } t_2 \text{ch } \psi$.

(ii) G_1 est un sous-semi-groupe de G , égal à HA^+H . Plus précisément, pour tout élément $g \in G_1$, il existe h_{ψ_1} et $h_{\psi_2} \in H$, et un unique élément $a_t \in A^+$ tels que $g = h_{\psi_1} a_t h_{\psi_2}$.

(i) Provient d'un calcul matriciel évident et (ii) est une conséquence de (i) et du fait que G_1 est le sous-semi-groupe de G engendré par H et A^+ .

Soit Ξ_1 paramétré par $\Gamma_1 = M/M' \times A_H^+$ et muni de la mesure associée $d\gamma_1 = d\dot{m}(\text{sh } \psi)^{n-2} d\psi$. Posons $Q(g, \gamma_1)$ la dérivée de Radon-Nikodym de l'action de G_1 sur Ξ_1 muni de la mesure $d\dot{m} d\psi$: on a $Q(h, \gamma_1) = 1$; calculons $Q(a_t, \gamma_1) = Q(a_t, (\dot{m}, h_{\psi}))$:

$$a_t \cdot (\dot{m}, h_{\psi}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_t \begin{pmatrix} \text{ch } \psi \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sh } t + \text{ch } t \text{ch } \psi \\ \text{ch } t + \text{sh } t \text{ch } \psi \\ \vdots \end{pmatrix};$$

posons

$$a_t \cdot (\dot{m}, h_\psi) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\dot{m}(t), h_{\psi(t)}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

on obtient par un calcul élémentaire:

$$\frac{d\dot{m}(t) d\psi(t)}{d\dot{m} d\psi} = \frac{d\psi(t)}{d\psi} = \frac{1}{\text{ch } t + \text{sh } t \text{ ch } \psi}.$$

Ainsi on peut réécrire la formule (37) de la manière suivante:

PROPOSITION 8.3. Lorsque $\text{Im}(\lambda) > \frac{n-3}{2}$ on a:

$$(38) \quad \Phi_{(n-2)/2, -1/2}(\lambda, t) = \frac{2^{2-n} \Gamma(1-i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3-n}{2} - i\lambda\right)} \int_{\Gamma_1} Q(a_t, \gamma_1)^{(n-1)/2 - i\lambda} d\gamma_1.$$

C'est-à-dire les fonctions de Jacobi de deuxième espèce sont moyennes du noyau de Poisson hyperbolique $Q(a, \gamma_1)$ sur la première frontière $SO_0(1, n-1)/SO(n-1)$ de l'espace riemannien symétrique $SO_0(1, n)/SO(n)$.

Remarque. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > -\frac{1}{2}$, définissons une action de $t \in \mathbb{R}_+$ sur $\psi \in \mathbb{R}^+$ définie par $t \cdot \psi = \psi(t)$ tel que $\text{ch } \psi(t) = (\text{sh } t + \text{ch } t \text{ ch } \psi) / (\text{ch } t + \text{sh } t \text{ ch } \psi)$ on a $Q(t, \psi) = d\psi(t)/d\psi = (\text{ch } t + \text{sh } t \text{ ch } \psi)^{-1}$. Ainsi $\Phi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t)$ apparaît comme moyenne sur \mathbb{R}_+ muni de la mesure $(\text{sh } \psi)^{2\alpha} d\psi$ du noyau de Poisson hyperbolique $Q(t, \psi)$.

Formule d'addition des fonctions de Jacobi de 2-ème espèce. Considérons Φ comme une fonction définie sur G_1 , bi-invariante par H , en posant:

$$\Phi_{(n-2)/2, -1/2}(\lambda, h_1 a_t h_2) = \Phi_{(n-2)/2, -1/2}(\lambda, t).$$

En utilisant le lemme 8.2 et la proposition 8.3, on obtient par des arguments classiques la formule d'addition suivante (cf., mutatis mutandis, la démonstration dans P. Eymard [6, théorème 4]).

PROPOSITION 8.4. i) Pour tout $g_1, g_2 \in G_1$ et pour tout $\gamma \in \Gamma_1$:

$$Q(g_2 g_1, \gamma) = Q(g_2, g_1 \cdot \gamma) Q(g_1, \gamma);$$

ii) pour tout $g_1, g_2 \in G_1$ et pour $\text{Im}(\lambda) > \frac{n-3}{2}$:

$$(39) \quad \Phi_{(n-2)/2, -1/2}(\lambda, g_1) \Phi_{(n-2)/2, -1/2}(\lambda, g_2) = \frac{2^{2-n} \Gamma(1-i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3-n}{2} - i\lambda\right)} \int_H \Phi_{(n-2)/2, -1/2}(\lambda, g_1 h g_2) dh.$$

On retrouve un cas particulier important d'un résultat récent de L. Durand, cf. [4], que l'on peut écrire comme suit: Pour $\text{Re}(\alpha) > -\frac{1}{2}$ et $\text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\alpha) - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & \Phi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t_1) \Phi_{\alpha, -1/2}(\lambda, t_2) \\ &= \frac{2^{-2\alpha} \Gamma(1-i\lambda)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha - i\lambda\right)} \\ & \quad \times \int_0^\infty \Phi_{\alpha, -1/2}(\lambda, \text{Arg ch}(\text{ch } t_1 \text{ ch } t_2 + \text{sh } t_1 \text{ sh } t_2 \text{ ch } \psi)) (\text{sh } \psi)^{2\alpha} d\psi. \end{aligned}$$

Note. M. J. Faraut me signale, entre autres résultats, qu'il vient de munir l'espace des fonctions à support dans G_1 , et bi-invariantes par H , d'une structure d'algèbre de convolution commutative telle que les fonctions $\Phi_{\alpha, -1/2}(\lambda, g)$ définissent des caractères de cette algèbre.

REFERENCES

- [1] R. CARROLL, *Some inversion theorems of Fourier type*, preprint (1980).
- [2] H. CHÉBLI, *Sur un théorème de Paley-Wiener associé à la décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm-Liouville sur $]0, +\infty[$* , J. Functional Anal. 17 (1974), pp. 447-461.
- [3] V. DITKINE AND A. PROUDNIKOV, *Transformations intégrales et calcul opérationnel*, Editions MIR, Moscow, 1978.
- [4] L. DURAND, *Nicholson-type integrals for products of Gegenbauer functions and related topics*, dans Theory and Application of Special Functions, R. Askey, Academic Press, New York, 1975.
- [5] A. ERDÉLYI ET AL., *Tables of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1954, vol. 2.
- [6] P. EYMARD, *Le noyau de Poisson et la théorie des groupes*, Symposia Math., XXII, INDAM, Rome, 1977, Academic Press, New York, 1977, pp. 107-132.
- [7] J. FARAUT, *Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques*, J. Math. Pures Appl., 58 (1979), pp. 369-444.
- [8] S. HELGASON, *Functions on symmetric spaces*, Proc. of Symposia in Pure Math., 26, 1972, American Mathematical Society, Providence, RI, 1973, pp. 102-146.
- [9] T. KOORNWINDER, *A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform*, Ark. Mat., 13 (1975), pp. 145-159.
- [10] J. L. LIONS, *Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes*, Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), pp. 9-95.
- [11] T. OSHIMA AND J. SEKIGUCHI, *Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space*, Inventiones Math., 57 (1980), pp. 1-81.
- [12] J. SEKIGUCHI, *Eigenspaces of the Laplace-Beltrami operator on a hyperboloid*, Nagoya Math. J., 79 (1980), pp. 151-185.
- [13] K. TRIMECHE, *Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley-Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$* , J. Math. Pures Appl., 60 (1981), pp. 51-98.
- [14] G. A. VIANO, *On the harmonic analysis of the elastic scattering amplitude of two spinless particles at fixed momentum transfer*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A, 32 (1980), pp. 109-123.